

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS DE SETIF 1

Cours

SYSTEMES NON LINEAIRES

Emira NECHADI

Table des matières

Introduction	1
1. Notions générales sur les systèmes non linéaires	2
1.1. Systèmes non linéaires	2
1.2. Points d'équilibre d'un système non linéaire	2
1.3. Exemples	2
1.3.1. Exemple 1	2
1.3.2. Exemple 2	3
1.4. Cycles limites	4
1.4.1. Exemple	4
1.5. Bifurcations	5
1.5.1. Exemple	5
1.6. Chaos	6
2. Exemples des systèmes non linéaires	7
2.1. Pendule simple	7
2.2. Oscillateur à résistance négative	8
3. Stabilité d'un système non linéaire	10
3.1. Plan de phase	10
3.1.1. Points singuliers	11
3.1.2. Nature des points singuliers	12
3.2. Stabilité de Lyapunov	14
3.2.1. Théorème de Lyapunov	15
3.2.2. Exemple	15
4. Non linéarités typiques	15
4.1. Classe des non-linéarités	17
4.2. Exemple d'un système tout ou rien	17
5. Nécessité pour un système de commande non linéaire	18
6. Commande par mode glissant	18
6.1. Introduction	18
6.2. Des systèmes à structure variable aux régimes glissants	20
6.3. Représentation des systèmes à structure variable	21
6.3.1. Commutation par contre réaction d'état variable	21
6.3.2. Commutation de type relais	22
6.4. Description du mode glissant pour les systèmes non linéaires	22
6.4.1. Définition	22
6.4.2. Approche de Filippov	23
6.4.2.1. Théorème	24
6.4.3. Condition de glissement	24
6.4.4. Dynamique glissante	25
6.4.4.1. Définition	25
6.4.4.2. Approche de la commande équivalente	25
6.4.4.3. Domaine de glissement	26
6.4.4.3.1. Théorème	27
6.4.5. Invariance des régimes glissants vis à vis des perturbations	27
6.4.5.1. Définition	28

6.4.5.2. Théorème	28
6.4.6. Bouclage linéarisant à structure variable	28
6.4.6.1. Linéarisation exacte par retour d'état statique	29
6.4.6.2. Bouclage a structure variable	30
6.4.7. Robustesse par rapport aux perturbations	31
6.4.8. Extensions méthodologiques	32
6.4.8.1. Commande continue selon Slotine	33
6.4.8.2. Commande par mode glissant sans phase d'approche	34
6.4.8.3. Exemple	35
Conclusion	

Introduction :

Un système, agrégation d'éléments interconnectés, est constitué naturellement ou artificiellement afin d'accomplir une tâche prédéfinie. Son état est affecté par une ou plusieurs variables, les entrées du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sorties.

Le système complet ou un des éléments le composant est généralement représenté par un schéma fonctionnel. L'action des entrées produit de manière causale des effets mesurés par les signaux de sortie représentés par des flèches sortantes. Les entrées affectant un système peuvent être de nature différente. Les unes ont pour but d'exercer des actions entraînant le fonctionnement souhaité du système ; ce sont les commandes. Les autres entrées troublent le fonctionnement désiré et sont définies comme des perturbations. Chaque élément constitutif de l'ensemble système peut être caractérisé par un nombre fini de variables et l'interdépendance des variables caractérisant chaque élément peut être exprimé sous la forme d'une loi mathématique. Ainsi la relation entre les entrées et les sorties du système est l'expression des lois de la physique associées au système, c'est à dire la combinaison des lois mathématiques précédentes.

L'ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entre les entrées et les sorties du système constitue le modèle mathématique du système. La modélisation, étape préliminaire de l'analyse d'un système quelconque, indépendamment de sa nature physique, de sa composition et de son degré de complexité.

La modélisation dépend ainsi de la nature physique du système mais aussi des hypothèses simplificatrices qu'il est possible de faire. Traitant uniquement dans ce cours des systèmes dynamiques, leur comportement sera décrit par des équations différentielles dans le cas de modèles en temps continu.

Les méthodes d'étude des systèmes linéaires sont très puissantes en raison des outils disponibles (algèbre linéaire, équations différentielles et systèmes

différentiels linéaires, ...etc). Malgré tout, se cantonner aux systèmes linéaires présente plusieurs limitations :

- Aucun système physique n'est complètement linéaire. Les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint.
- Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement, à des systèmes linéaires.
- Certains phénomènes ne peuvent pas être décrits par des modèles et méthodes linéaires.

1. Notions générales sur les systèmes non linéaires :

1.1. Systèmes non linéaires :

Un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

1.2. Points d'équilibre d'un système non linéaire

A la différence des systèmes linéaires qui possèdent un point d'équilibre unique, les systèmes non linéaires peuvent posséder plusieurs points d'équilibre.

1.3. Exemples :

1.3.1. Exemple 1 :

Soit le système physique linéarisé suivant :

$$\dot{x}(t) = -x(t), \quad x_0 = x(0) \quad (1.1)$$

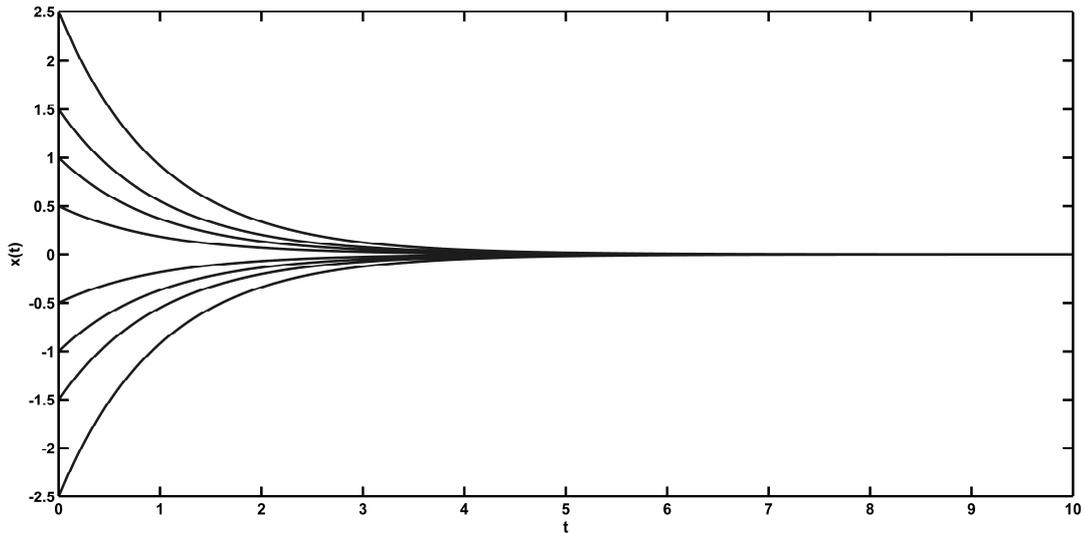


Figure 1.1. Point d'équilibre d'un système linéaire.

Le système possède un point d'équilibre unique $x=0$. Dans le cas linéaire, le point d'équilibre est stable et les trajectoires d'état pour différentes conditions initiales, décroissent vers l'état d'équilibre. Le point d'équilibre $x = 0$ est stable localement puisque toute trajectoire issue d'une condition initiale suffisamment proche converge vers cet état d'équilibre.

1.3.2. Exemple 2 :

Soit le système physique régi par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t), \quad x_0 = x(0) \quad (1.2)$$

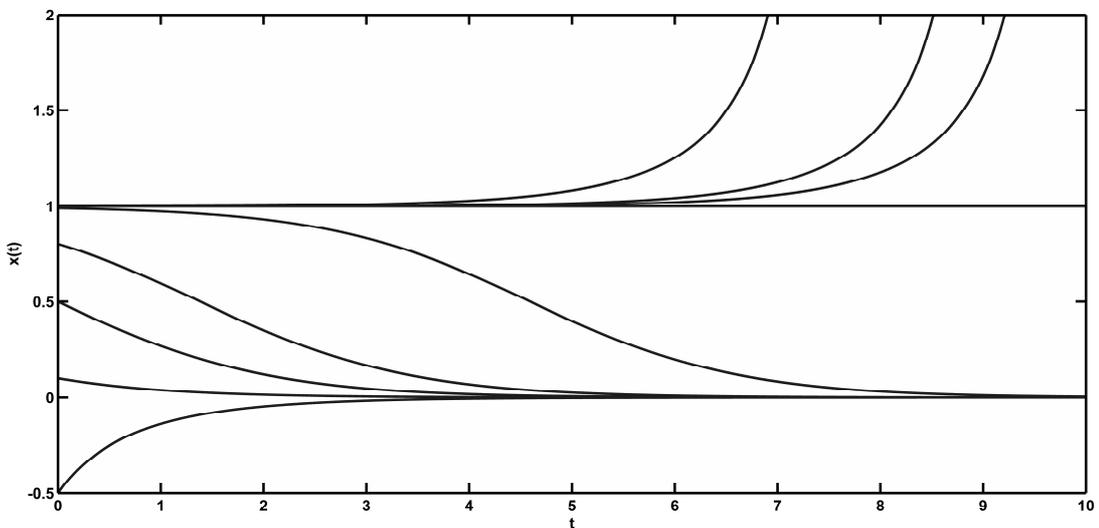


Figure 1.2. Points d'équilibre d'un système non linéaire.

Le système possède deux points d'équilibre $x=0$ et $x=1$. Dans le cas non linéaire, les deux points d'équilibre sont de nature différente. Le point $x=1$ est instable constitue en quelque sorte une frontière de stabilité. L'axe est en effet divisé en deux régions de conditions initiales pour lesquelles les trajectoires sont convergentes vers l'état d'équilibre 0 ou sont divergentes.

1.4. Cycles limites :

Un système linéaire invariant dans le temps, pour osciller, doit avoir une paire de pôles sur l'axe imaginaire. Cette condition est évidemment très fragile vis à vis de perturbations et/ou erreurs de modélisation pouvant affecter la valeur de ces pôles. De plus, l'amplitude de l'oscillation obtenue en théorie dépend uniquement de la condition initiale.

Au contraire, les systèmes non linéaires peuvent être le siège d'oscillations, (cycles limites), caractérisées par leur amplitude et leur fréquence, indépendantes de la condition initiale x_0 , et sans excitation extérieure. Il est donc indispensable d'utiliser un système non linéaire si l'on souhaite réaliser en pratique une oscillation stable. Donc certains systèmes non linéaires présentent des oscillations d'amplitude et de période constante avec entrée nulle. Ces oscillations sont appelées cycles limites (auto oscillation).

1.4.1. Exemple :

Soit le système suivant présenté par l'équation de Van Der Pol :

$$m\ddot{x}(t) + 2c(x^2(t) - 1)\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad c > 0 \quad (1.3)$$

avec m , c et k sont des constantes liées au système physique.

La courbe fermée dans figure suivante traduit un cycle limite, on retourne sur le même cycle, quelque soit la condition initiale choisie.

Remarques :

1. L'amplitude des oscillations est indépendante des conditions initiales, ce qui n'est pas le cas des systèmes linéaires.
2. Les cycles limites dans les systèmes non linéaires sont relativement peu sensibles aux variations de paramètres.

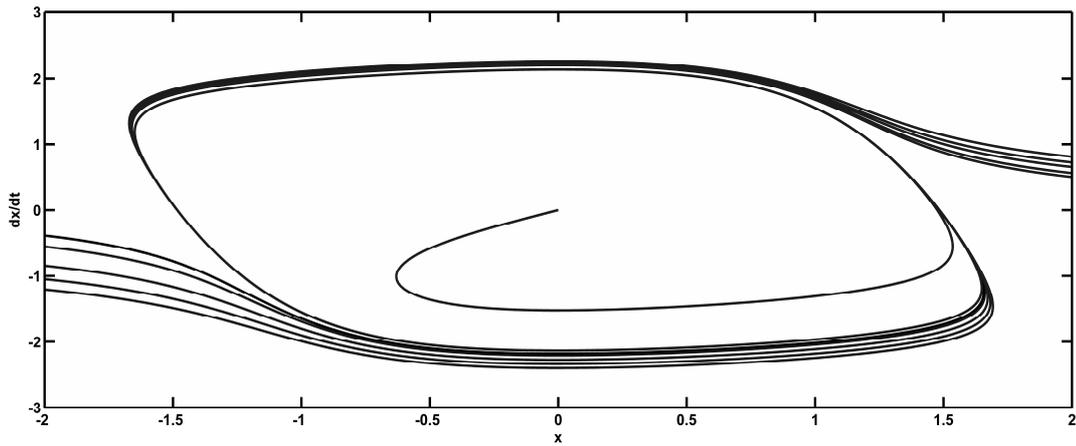


Figure 1.3. Cycles limites d'un système de Van Der Pol.

1.5. Bifurcations :

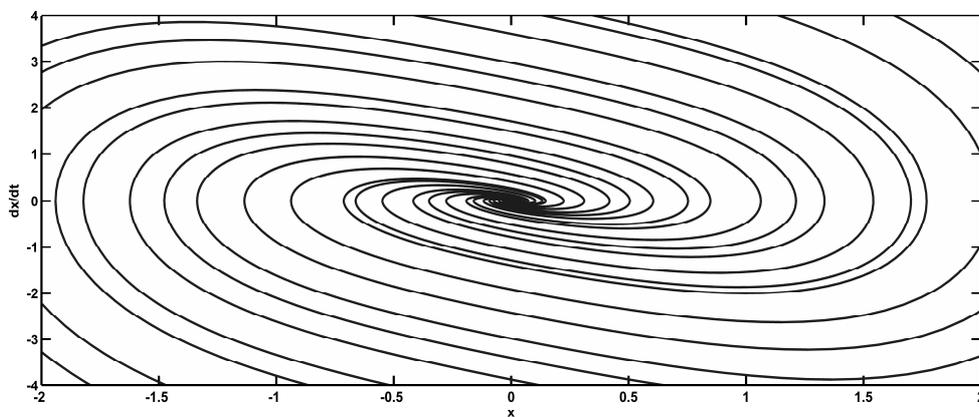
Des changements quantitatifs des paramètres peuvent entraîner des changements qualitatifs des propriétés du système, (nombre de points d'équilibre, stabilité des points d'équilibre).

1.5.1. Exemple :

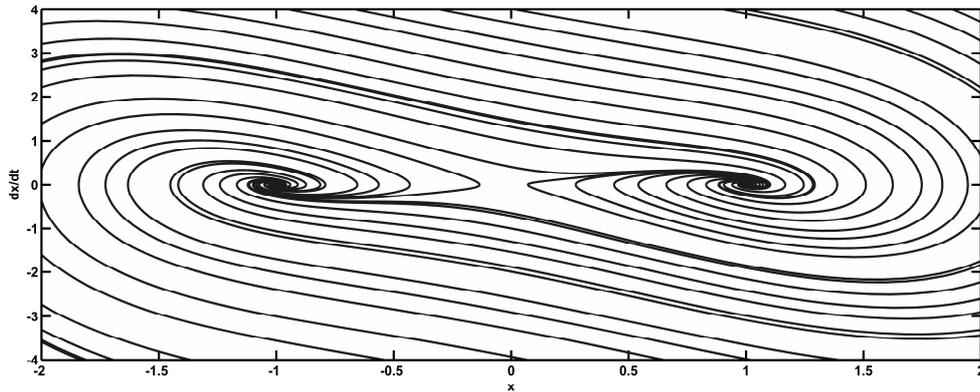
Soit le système présenté par l'équation non amortie de Duffing:

$$\ddot{x}(t) + \alpha x(t) + x^3(t) = 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (1.4)$$

Ce système possède trois points d'équilibre sont: $x = (0,0)$, $x = (0, \sqrt{\alpha})$ et $x = (0, -\sqrt{\alpha})$.



a.



b.

Figure 1.4. Système de Duffing à bifurcations.

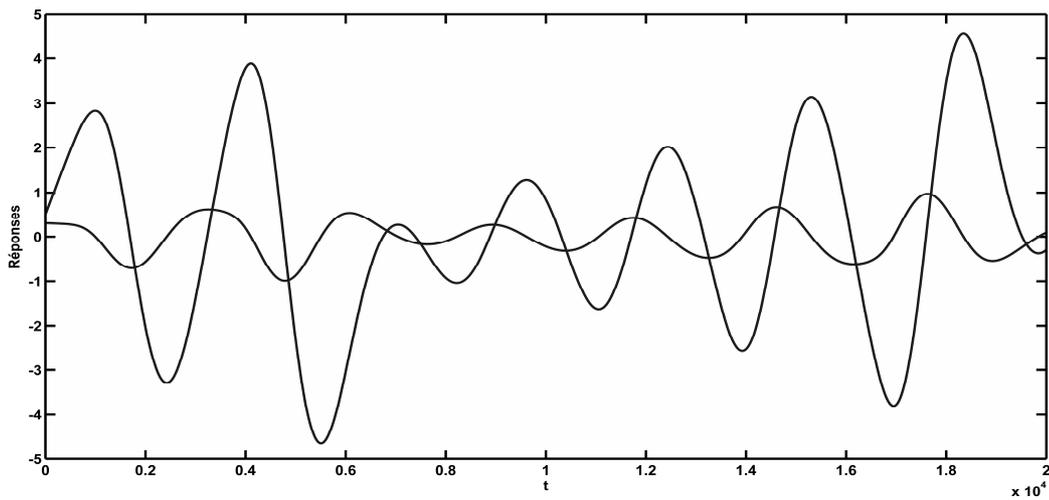
Suivant α le nombre de points d'équilibre sera différent. Quand α varie, le nombre de points d'équilibre varie de 1 à 3. Ainsi à $\alpha = 0$ est une valeur de bifurcation critique.

On peut conclure que, quand les paramètres d'un système non linéaire sont modifiés, la stabilité des points d'équilibre est susceptible d'être changée, et le nombre de points d'équilibre peut évoluer. Les valeurs critiques des paramètres induisant ce genre de phénomène sont appelées valeur critique de bifurcation.

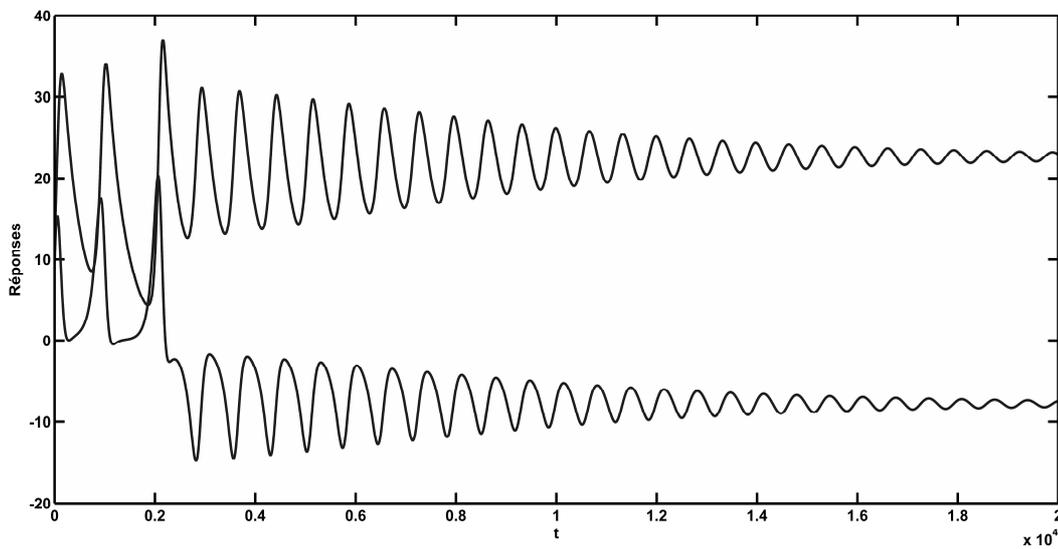
1.6. Chaos :

Un système non linéaire peut avoir un comportement en régime permanent plus complexe que ceux habituellement répertoriés tels que l'équilibre, les oscillations périodiques...

Dans ce cas, la sortie du système est extrêmement sensible aux conditions initiales, d'où la non prévisibilité de la sortie. Certains comportements chaotiques font ainsi apparaître un aspect aléatoire malgré leur nature déterministe intrinsèque.



a.



b.

Figure 1.5. Réponses d'un système chaotique pour des conditions initiales différentes.

Le comportement des systèmes non linéaires est très sensible aux variations des conditions initiales. La notion de chaos réside dans le côté non prédictible de la réponse d'un système non linéaire en fonction d'une variation des conditions initiales.

2. Exemples des systèmes non linéaires :

2.1. Pendule simple :

Soit le système suivant qui représente un pendule simple, où l est la longueur de la corde considérée comme rigide et sans masse et m la masse en mouvement. On note θ l'angle que la corde fait avec la verticale. Afin d'écrire les équations du mouvement, il est nécessaire d'identifier les forces agissant sur la masse. Tout d'abord, il y a la force gravitationnelle donnée par mg où g est l'accélération de la gravité. On suppose de plus que la masse est soumise à une force de résistance de friction proportionnelle à la vitesse de la masse et de coefficient de friction k .

En appliquant le premier principe de la dynamique par projection sur l'axe tangentiel, on obtient l'équation différentielle du mouvement.

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) - kl\dot{\theta} \quad (2.1)$$

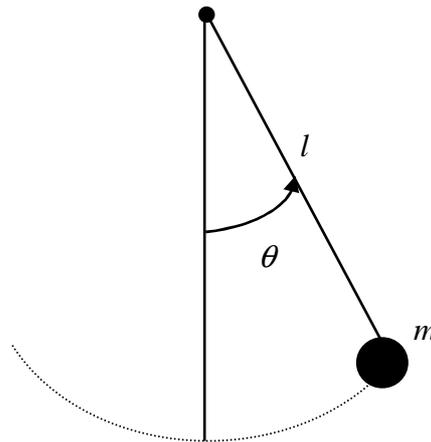


Figure 2.1. Pendule simple.

A partir de ce modèle mathématique, il est possible de dériver un modèle dans l'espace d'état non linéaire en choisissant les variables d'état $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

2.2. Oscillateur à résistance négative :

La structure fondamentale d'un type d'oscillateur électronique est représentée dans la figure suivante. L'inductance et la capacité sont supposées linéaires, invariante dans le temps et passive. L'élément résistif est un circuit actif dont la caractéristique tension/courant est non linéaire $i = h(v)$.

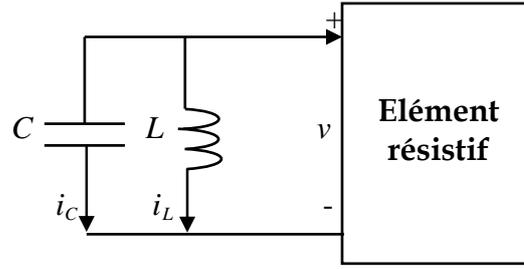


Figure 2.2. Oscillateur à résistance négative.

On suppose de plus que la fonction h satisfait les conditions :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) < 0 \\ \lim_{v \rightarrow +\infty} h(v) \rightarrow +\infty \\ \lim_{v \rightarrow -\infty} h(v) \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.3)$$

En écrivant la loi des nœuds, on a:

$$i_C + i_L + i = 0 \quad (2.4)$$

ce qui se réécrit:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(s) ds + h(v) = 0 \quad (2.5)$$

ou encore, après différenciation,

$$CL \frac{d^2v}{dt^2} + v + Lh'(v) \frac{dv}{dt} = 0 \quad (2.6)$$

Par un changement d'échelle de temps, cette équation peut être réduite à une équation bien connue en théorie des systèmes non linéaires. On pose ainsi $\tau = t/\sqrt{LC}$, ce qui permet d'écrire:

$$\frac{dv}{d\tau} = \sqrt{LC} \frac{dv}{dt} \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = LC \frac{d^2v}{dt^2} \quad (2.8)$$

L'équation différentielle du circuit est alors donnée par:

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v) \dot{v} + v = 0 \quad (2.9)$$

où $\varepsilon = \sqrt{L/C}$. C'est un cas particulier de l'équation de Liénard qui a la forme générale:

$$\ddot{v} + \mathcal{E}^f(v)\dot{v} + g(v) = 0 \quad (2.10)$$

Dans le cas où $h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$, on retrouve l'équation de Van der Pol. En posant $x_1 = v$ et $x_2 = \dot{v}$, les équations d'état associées à l'équation de Van der Pol sont alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \mathcal{E}h'(x_1)x_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

3. Stabilité d'un système non linéaire :

L'étude de la stabilité d'un système non linéaire est l'analyse du comportement des systèmes non linéaires, en particulier au voisinage des points d'équilibre. Ils existent deux méthodes dans le contexte de l'étude de la stabilité locale ou globale à savoir :

- Plan de phase.
- Théorie de Lyapunov

3.1. Plan de phase :

Plan de phase est un outil graphique qui permet une analyse du comportement des systèmes du second ordre en régime libre ($u = 0$). Cet outil est basé sur la représentation dans l'espace d'état du système du second ordre, les trajectoires obtenues pour différentes conditions initiales et analyser d'un point de vue qualitatif les caractéristiques de ces trajectoires.

La méthode de construction du plan ne nécessite pas nécessairement la résolution analytique des équations différentielles d'état.

En revanche, il n'existe pas toujours de solutions analytiques aux trajectoires calculées dans l'espace des phases. Cette méthode, connue depuis longtemps, connaît un regain d'intérêt lié aux performances des calculateurs actuels qui rendent possible le calcul des trajectoires solutions par intégration numérique. Dans le cadre des systèmes asservis non linéaires, cette méthode est exacte et ne suppose pas de condition particulière.

Remarques :

1. La méthode s'applique à tous les types de non linéarités.

2. Pour de nombreux systèmes non linéaires, il est possible d'établir un modèle approximatif du second ordre, et la méthode du plan de phase constitue une approche intéressante pour leur analyse.

3.1.1. Points singuliers :

On considère le système de second ordre décrit par un système différentiel de forme canonique :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = X_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans le plan de phase l'équation des trajectoires est la solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)} \quad (3.2)$$

avec des conditions initiales choisies. Cette dernière équation précise de façon unique la tangente en chaque point de la trajectoire, sauf aux points singuliers.

D'où le point (x_{10}, x_{20}) est un point singulier si :

$$\begin{cases} X_1(x_{10}, x_{20}) = 0 \\ X_2(x_{10}, x_{20}) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

En effet, en un tel point, le rapport $\frac{dx_2}{dx_1}$ n'est pas défini.

Les points singuliers sont des positions d'équilibre du système. Ce point singulier sera stable si toutes les trajectoires de phase concourent vers ce point, instable dans le cas contraire, c'est-à-dire si certaines (il en suffit d'une) trajectoires s'en écartent.

En introduisant la matrice Jacobienne J :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La matrice Jacobienne à coefficients constants peut décrire le comportement du système au voisinage du point singulier (x_{10}, x_{20}) .

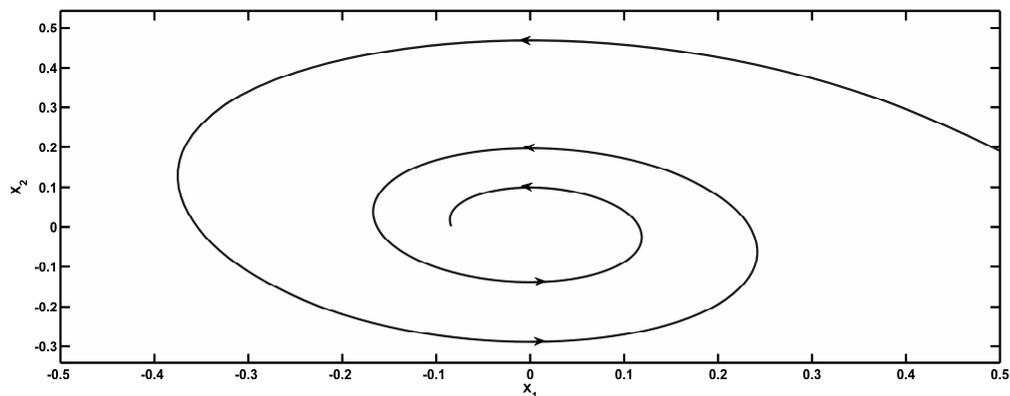
3.1.2. Nature des points singuliers :

En calculant les valeurs propres de la matrice Jacobienne J , qui décrit les trajectoires au voisinage du point singulier. Pour que le point singulier soit stable, il faut qu'asymptotiquement, c'est-à-dire pour $t \rightarrow +\infty$, toute trajectoire revienne au point initial. Cette condition est vérifiée si et seulement si les valeurs propres ont des parties réelles négatives.

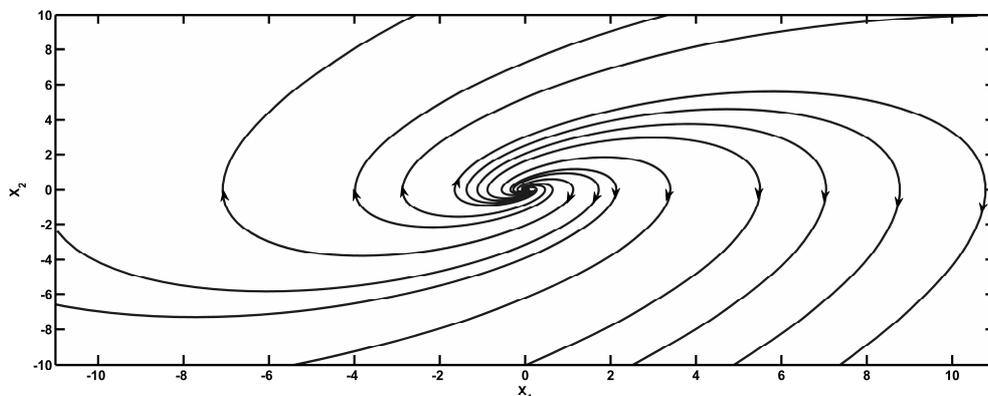
L'étude des valeurs propres permet ainsi de caractériser l'allure générale des trajectoires autour d'un point singulier.

Les différentes possibilités des valeurs propres selon leurs signes et natures conduisent à définir les cas suivants:

- **Point singulier foyer** : Si les valeurs propres sont complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle. On dit que les courbes forment un foyer attractif ou stable si la partie réelle est négative et répulsif ou instable si la partie réelle est positive.



a.



b.

Figure 3.1. Portrait de phase autour d'un point singulier foyer (a) stable et (b) instable.

- **Point singulier selle (col) :** Si les valeurs propres sont réelles et de signes opposés. On dit que les courbes intégrales forment un col.

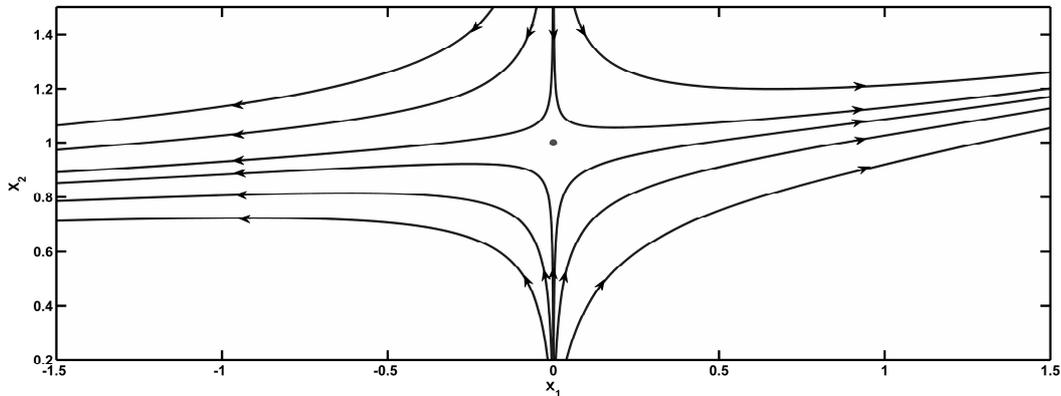


Figure 3.2.. Portrait de phase autour d'un point singulier selle.

- **Point singulier centre :** Si les valeurs propres sont imaginaires pures. Les courbes forment un centre. Les orbites sont ses cercles.

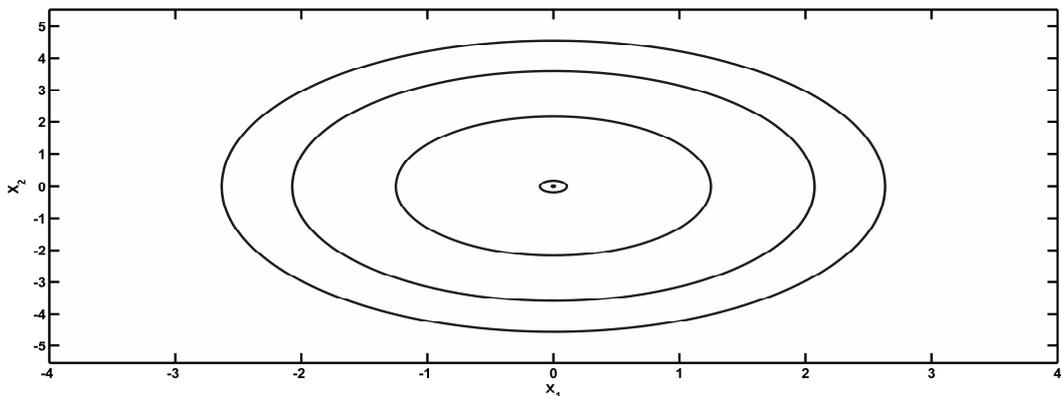
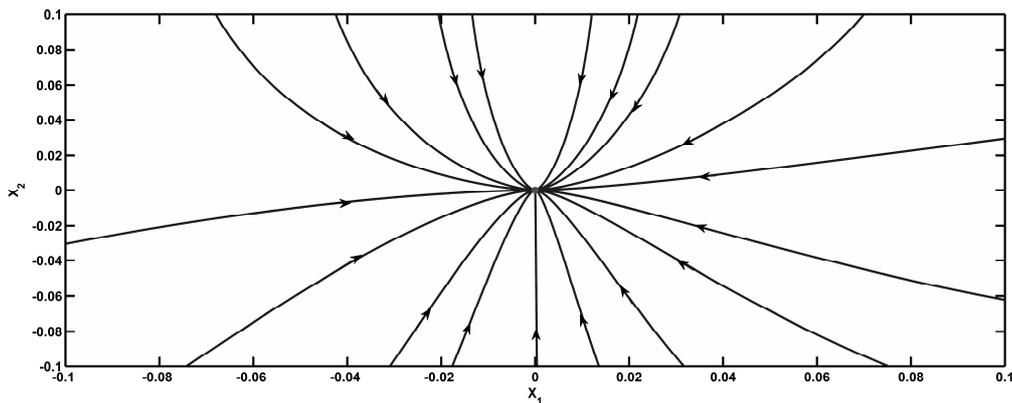
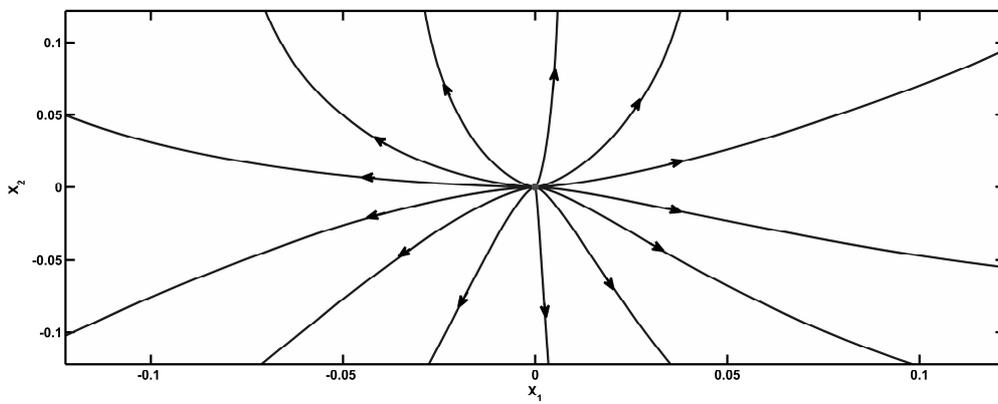


Figure 3.3. Portrait de phase autour d'un point singulier centre.

- **Point singulier nœud :** Si les valeurs propres sont réelles et de même signe. On dit qu'il s'agit d'un nœud qui est attractif ou stable si les valeurs propres sont négatives et répulsif ou instable si valeurs propres sont positives.



a.



b.

Figure 3.4. Portrait de phase autour d'un point singulier nœud (a) stable (puits) et (b) instable (source).

3.2. Stabilité de Lyapunov :

En Mathématique et en Automatique, la notion de stabilité de Lyapunov (ou, plus correctement, de stabilité au sens de Lyapunov) apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques. De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la physique nucléaire, ..., etc.

3.2.1. Théorème de Lyapunov :

Le théorème d' Alexandre Lyapunov dit qu'un système dynamique (décrit par une équation différentielle non linéaire libre) est stable en un point d'équilibre si et seulement s'il existe une fonction vérifiant certaines conditions précises et liées à la fonction de l'équation différentielle et la fonction f à ce

point. Le problème de la stabilité se ramène donc à chercher une telle fonction (dite de fonction de Lyapunov), souvent par tâtonnement.

Les conditions que doit vérifier une fonction de Lyapunov du problème dynamique rappellent les conditions que doit vérifier l'énergie potentielle pour qu'il y ait stabilité d'un système physique.

3.2.2. Exemple :

Considérons le système décrit par l'équation différentielle du premier ordre:

$$\dot{x} = -x - x^3 \quad (3.5)$$

Le but est de déterminer si le point d'équilibre est stable sans avoir à résoudre l'équation différentielle.

Soit alors la fonction:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (3.6)$$

On peut l'assimiler à une énergie puisque cette fonction est strictement positive. Calculons maintenant la dérivée de cette fonction le long des trajectoires du système.

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \quad (3.7)$$

d'où:

$$\dot{V}(x) = x(-x - x^3) = -x^2 - x^4 \quad (3.8)$$

Par conséquent, on dit que la fonction V est définie négative.

$$\dot{V}(x) < 0 \quad (3.9)$$

Cette énergie est donc toujours strictement décroissante. On dit que V est une fonction de Lyapunov que le point d'équilibre 0 est globalement asymptotiquement stable.

4. Non linéarités typiques :

Certains systèmes ou éléments d'un système sont caractérisés par un fonctionnement non linéaire, de part leur conception, leurs limitations technologiques ou, plus simplement, leur principe même de fonctionnement.

La caractéristique entrée/sortie (e/s) d'un système présente fréquemment des distorsions dues aux non-linéarités du système. Par exemple, un amplificateur présente une saturation, un pont de redressement présente des seuils en raison des seuils des diodes qui le composent.

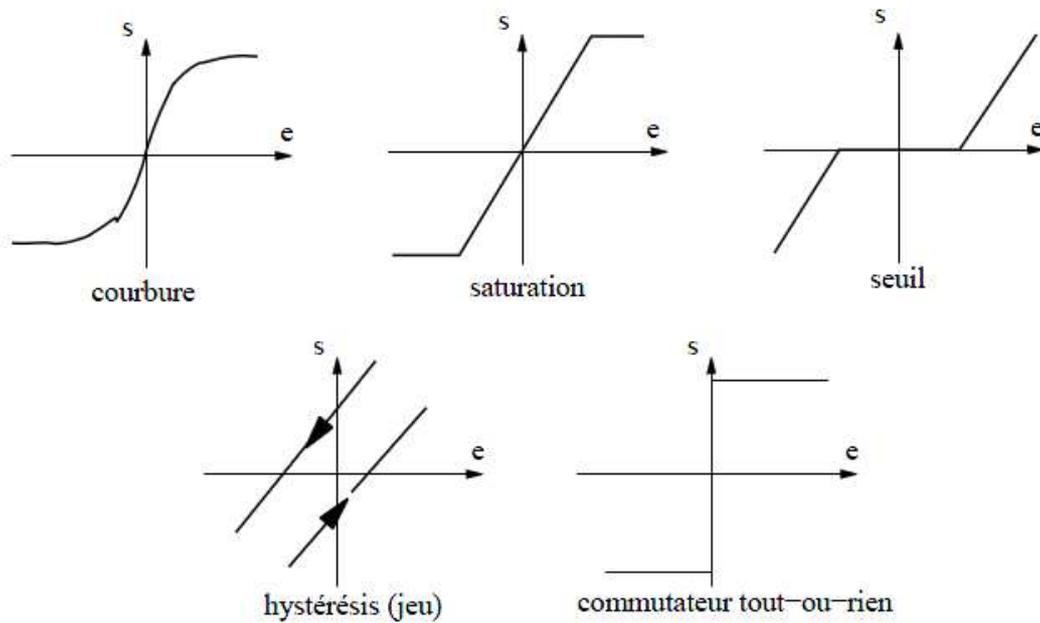


Figure 4.1. Exemple de non linéarités.

Ces cinq non-linéarités de base peuvent se combiner pour former des non linéarités plus complexes.

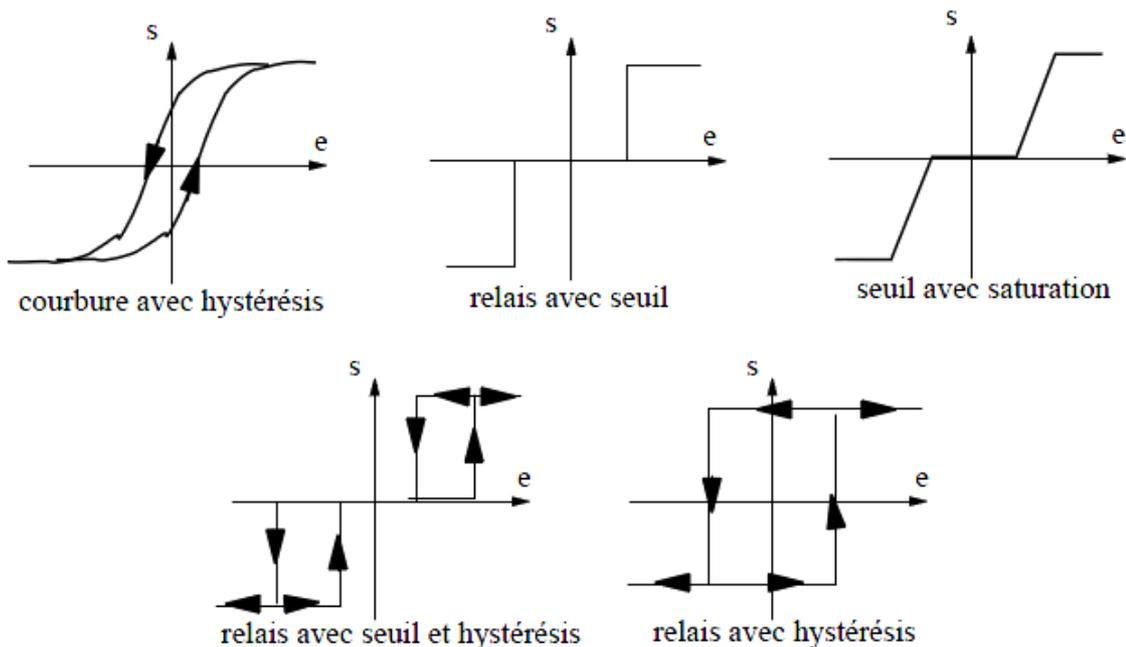


Figure 4.2. Combinaisons de non linéarités.

Les cinq non-linéarités et leurs combinaisons permettent de représenter à peu près tous les types de non-linéarités rencontrés dans les systèmes asservis.

4.1. Classe des non-linéarités :

On peut classer les non-linéarités en plusieurs catégories selon leurs propriétés :

- des non-linéarités continues (courbures) ou discontinues (relais);
- des non-linéarités avec ou sans mémoire (toutes celles avec hystérésis);
- des non-linéarités accidentelles, c'est à dire dues aux imperfections des composants (saturation d'un amplificateur, jeu);
- des non-linéarités essentielles, c'est à dire liées à la nature même du composant (relais).

En général on distingue deux types de systèmes non linéaires :

- ceux pour lesquels ces non linéarités peuvent être considérées comme gênantes ou parasites ;
- ceux dans lesquels un organe volontairement non linéaire est volontairement introduit pour produire un effet particulier.

4.2. Exemple d'un système tout ou rien :

Les systèmes dits à fonctionnement tout ou rien sont caractérisés par une sortie ne pouvant prendre que deux (parfois trois) valeurs distinctes. La valeur de la sortie est en général déterminée par l'intervalle dans lequel se trouve la valeur d'entrée. En fonction de la forme de la caractéristique, ces systèmes peuvent être appelés plus ou moins, avec ou sans seuil.

Les relais électriques, qui sont des organes de commande fréquemment utilisés, possèdent des caractéristiques de ce type.

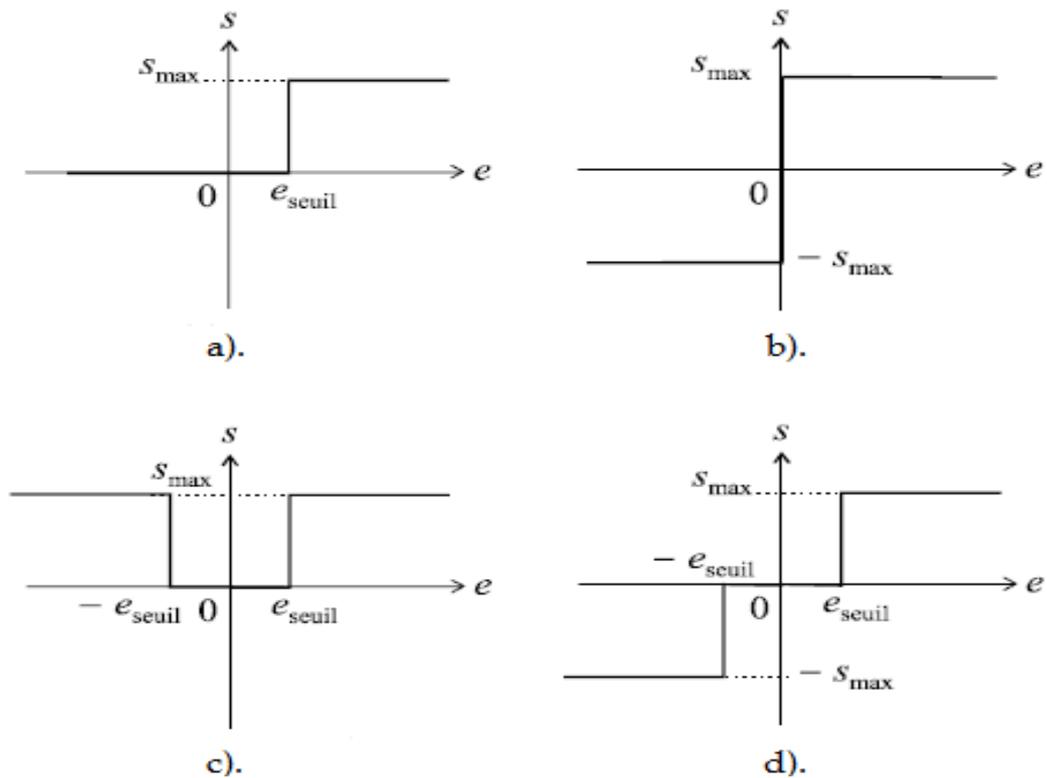


Figure 4.3. Caractéristiques d'organes tout ou rien, (a) simple asymétrique, (b) plus ou moins sans seuil, (c) symétrique et (d) plus ou moins avec seuil.

5. Nécessité pour un système de commande non linéaire :

La synthèse de commandes linéaires s'appuie des modèles linéaires. S'il est possible de se ramener à des modèles linéaires par linéarisation locale, la robustesse de la commande résulte d'une bonne connaissance des points de fonctionnement. Cette dernière présuppose une bonne connaissance du modèle. Il est alors difficile de prendre en compte les incertitudes liées au modèle :

- Incertitude liée aux paramètres;
- Incertitude liée à la structure (modèle);

Les commandes linéaires se révèlent complètement inefficaces face à des systèmes à forte non linéarité et l'évolution des technologies constitue un facteur supplémentaire au développement des techniques de commande non linéaire.

6. Commande par mode glissant :

6.1. Introduction :

Les processus physiques sont le plus souvent non linéaires, mal définis et ont des paramètres variables. Par exemple, dans le cas des robots les équations dynamiques sont non linéaires, couplées, et les paramètres intervenant dans leur description dépendent de la charge. D'autre part, un modèle mathématique n'est rien d'autre qu'une représentation approximative de la réalité physique et cependant nous ne disposons que de ce modèle pour construire une loi de commande. Ainsi en vertu de la physique du système, qu'il nous faudra prendre en compte, la commande devra être robuste dans le sens où elle devra assurer une faible sensibilité aux incertitudes sur les paramètres, à leurs variations et aux perturbations.

Les systèmes de commande à structure variable constituent une solution de ce problème. Ils sont basés sur l'utilisation d'un terme discontinu dans la commande afin de contraindre le point représentatif de l'évolution du système à vérifier une équation différentielle, choisi a priori généralement linéaire, invariante et exponentiellement stable.

Dans la réalité, il est souvent très difficile de représenter fidèlement un processus et de connaître toutes les variables mise en jeu. Par conséquent, la loi de commande qui lui sera associée doit être robuste afin de pallier à certains non linéarité ou erreurs d'identification.

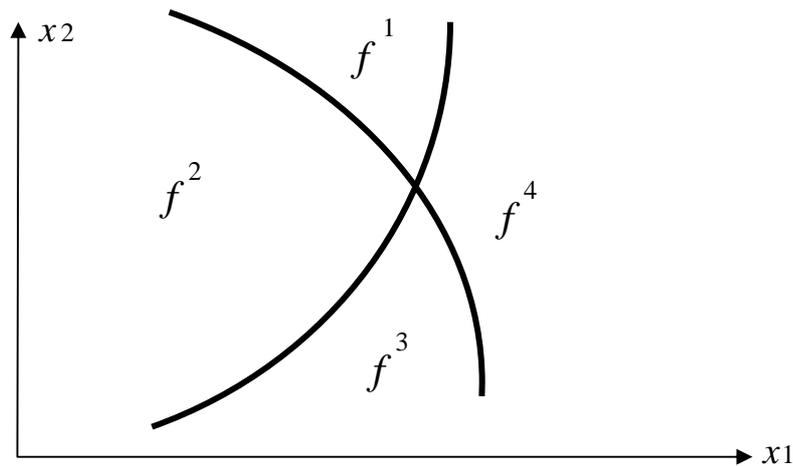
La commande par mode glissant permet de répondre à ce problème, cette robustesse se fera au déterminant des performances. En effet, la discontinuité de l'entrée induit des vibrations haute-fréquences indésirables en pratique. De plus, la surface de glissement définie dans le formalisme réduit l'ordre du système en boucle fermée, ce qui ne permet pas dans certains cas, d'imposer au système un mode de stabilisation.

Dans le but de remédier à ces inconvénients, on se propose dans ce qui suit de définir, pour des systèmes non linéaires, une commande par mode glissant qui soit robuste, performante et présentant une simplicité de mise en œuvre. Celui-ci est basé sur la mise en œuvre d'une surface de glissement de même ordre que le système. La surface ainsi définie fait intervenir une loi de commande particulière, appelée commande dynamique par mode glissant.

6.2. Des systèmes à structure variable aux régimes glissants :

La théorie des systèmes à structure variable, initialisée au début du 20^{ème} siècle, a pris son essor dans les années 60 par Emelyanov et, à cause de la structure du contrôleur utilisé qui peut changer d'une façon discontinue entre deux ou plusieurs structures. C'est le cas, par exemple des circuits de conversion de puissance, où le système est gouverné par une équation différentielle différente pour chaque position de l'interrupteur.

La théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés a fait l'objet d'études détaillées au cours des dernières années aussi bien par les chercheurs soviétiques, que par les chercheurs des autres pays. Ce n'est que durant le premier congrès de l'IFAC en 1960 qu'une discussions a été menée sur la détermination du comportement dynamique du système commandé sur la surface de commutation a été levée.



Les théories de la commande bang-bang est des systèmes à relais constituent un cas particulier de la théorie des systèmes à structure variable. Elle a donné naissance aux notions de régimes glissants qui se sont par la suite étendus aux systèmes discontinus réalisés artificiellement, c'est-à-dire, des systèmes du type $\dot{x} = f(x,t)$, avec f une fonction non linéaire continue, et pour lesquels on définit un retour d'état discontinu. Cette approche a pour but de maintenir l'état représentatif de l'évolution du système sur une variété S définie au

préalable, appelée surface de glissement. Dans ce contexte et sous certaines conditions, le système est dit en régime glissant.

La dynamique du système ainsi que sa stabilité sont indépendantes de la fonction $f(x,t)$ et dépendent uniquement des paramètres de l'hyper surface choisie, ce qui explique l'insensibilité de cette loi de commande vis-à-vis des perturbations et des variations paramétriques.

6.3. Représentation des systèmes à structure variable :

On peut distinguer deux configurations de base pour les systèmes à structure variable présentées dans ce qui suit :

6.3.1. Commutation par contre réaction d'état variable :

Le changement de la structure se fait lors de la commutation de la commande u . L'organe de commande reçoit dans ce cas une commande qui commute rapidement entre deux valeurs variables, qui peut provoquer de fortes sollicitations de l'organe de commande, donc, une réalisation pratique impossible.

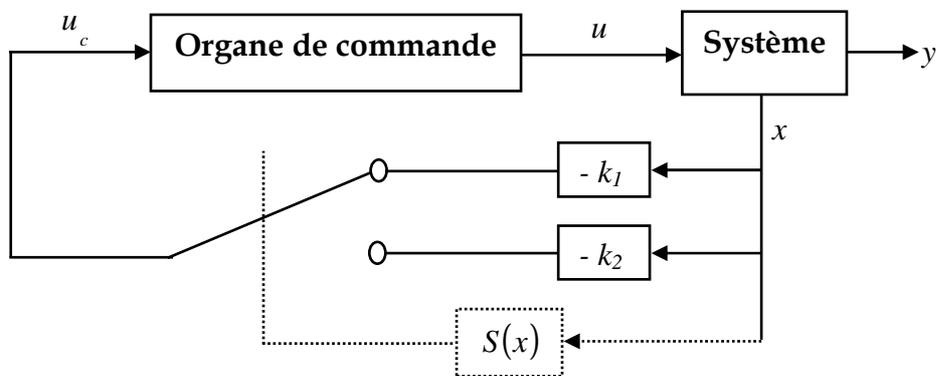


Figure 6.2. Configuration par commutation d'une Contre réaction d'état variable.

Le système fonctionne alors en mode glissant et le comportement dynamique du système est déterminé par la condition $S(x) = 0$.

$$\begin{cases} u_c = -k_1 x, & \text{Pour : } S(x) > 0 \\ u_c = -k_2 x & \text{Pour : } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

6.3.2. Commutation de type relais :

Le changement de la structure se fait par commutation au niveau de l'organe de commande, conformément à la figure représentée ci-dessous.

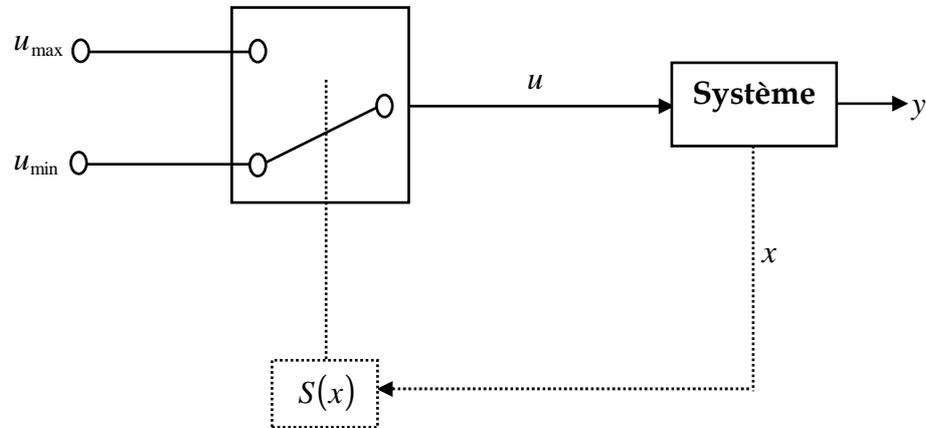


Figure 6.3. Configuration par commutation au niveau de l'organe de commande.

Dans ce cas, l'organe de commande est conçu de sorte que la grandeur de commande commute entre deux valeurs constantes u_{\max} et u_{\min} , selon le signe de la fonction $S(x)$ la logique de commutation est donnée par :

$$\begin{cases} u = u_{\max} , & \text{Pour : } S(x) > 0 \\ u = u_{\min} , & \text{Pour : } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Cette configuration correspond à un réglage à deux positions, avec une loi de commutation plus performante.

Lorsque le régime glissant est atteint, les variables d'état sont reliées entre elles par la relation : $S(x) = 0$.

6.4. Description du mode glissant pour les systèmes non linéaires :

6.4.1. Définition :

La technologie des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement.

6.4.2. Approche de Filippov :

On présente l'approche de Filippov dans le cas d'une seule surface de discontinuité, afin de résoudre le problème de solution sur la surface de discontinuité S , il est nécessaire de chercher une fonction continue du temps qui évolue sur S . Pour cela, il faut prolonger le champ f sur la surface S , c'est-à-dire, il faut que f appartienne à l'espace tangent à S en x . Par suite, les vecteurs vitesses doivent être dirigés vers la surface S , en d'autres termes, la surface S doit être attractive au moins dans un voisinage.

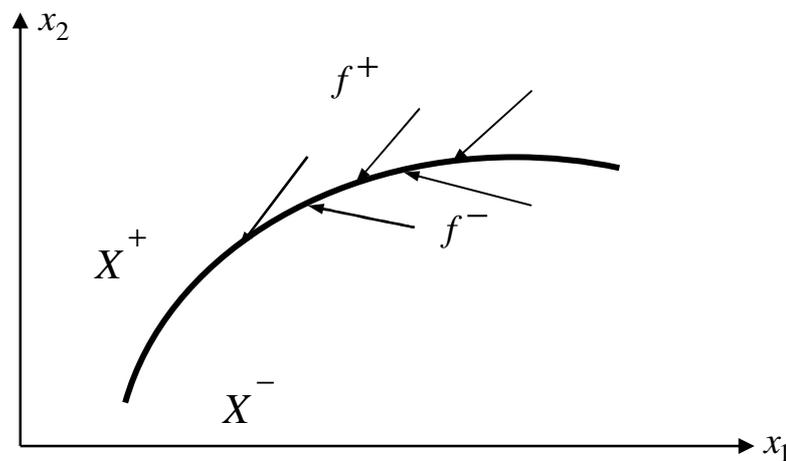


Figure 6.4. Schéma de principe du régime glissant selon une coupe de l'espace d'état.

L'espace d'état x est donc caractérisé par :

$$x = \begin{cases} X^+ & \text{Si } S(x) > 0 \\ X^- & \text{Si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Ce qui nous donne au voisinage de $S(x)=0$ deux valeurs de f :

$$f = \begin{cases} f^+ & \text{Si } S(x) > 0 \\ f^- & \text{Si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

Nous appellerons f_N^+ et f_N^- les projections respectives de f^+ et de f^- sur la normale à la surface $S(x)=0$, orientée de X^- vers X^+ .

Soit le système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (6.5)$$

Les conditions d'existence et d'unicité d'une solution $x(t)$ du système (6.5) sont fournies par le théorème de Filippov suivant :

6.4.2.1. Théorème :

Considérons le système décrit par l'équation (6.5) satisfaisant la condition :

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq K, \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (6.6)$$

K étant une constante indépendante de t et de x . Cette condition étant vérifiée pour tout x dans le domaine $X = X^- \cup X^+$. Soit une fonction S deux fois différentiable, chacune des fonctions f_N^+ et f_N^- est continue par rapport à x et t , pour x solution de $S(x) = 0$, et le vecteur $h = f_N^+ - f_N^-$ est continûment différentiable. Si en chaque point de la surface $S(x) = 0$, une des inégalités $f_N^+ < 0$ et $f_N^- > 0$ est vérifiée (pas obligatoirement la même en tout point de $S(x) = 0$), il existe alors dans le domaine X , une solution unique $x(t)$ du système (6.5) qui dépend des conditions initiales de façon continue.

Remarque :

On peut donc conclure que pour prolonger une solution $x(t)$ de (6.5) sur la surface S , il faut que cette dernière S soit attractive au moins dans un voisinage.

6.4.3. Condition de glissement :

Si l'on exprime la condition d'existence de solution de l'équation $\dot{x} = f(x, t)$ en fonction de la surface S , il est nécessaire de calculer sa dérivée :

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \langle \nabla S, f \rangle \quad (6.7)$$

qui représente le produit scalaire de la normale à la surface $S(x) = 0$, orientée de X^- vers X^+ et du vecteur $f(x, t)$. Par suite, si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on en déduit :

$$(f^+ < 0 \text{ et } f^- > 0) \Leftrightarrow S\dot{S} < 0 \quad (6.8)$$

Cette condition (6.8), appelée condition de glissement, représente l'inégalité fondamentale pour la synthèse de la commande par modes glissant. Elle traduit le fait que si les projection de f^+ et f^- sur le vecteur ∇S , dans un voisinage de la surface S , sont de signes contraires alors la surface S est attractive.

6.4.4. Dynamique glissante :

6.4.4.1. Définition :

La dynamique glissante est définie par la trajectoire de l'état sur la surface glissante S . Il existe deux approches différentes selon la nature du système traité, c'est à dire discontinu par nature ou artificiellement.

Dans le premier cas, on considère que la commutation est parfaite et on applique l'approche de Phillipov.

Dans le deuxième cas, c'est l'approche de la commande équivalente qui est la plus utilisée.

6.4.4.2. Approche de la commande équivalente :

La dynamique glissante résulte de l'action du champ équivalent, donné par la commande, appelée commande équivalente, qui rend la surface de glissement invariante. Cette condition d'invariance a été reprise en utilisant les concepts de la géométrie différentielle. On considère des systèmes du type :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6.9)$$

avec $g = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$ un champ de vecteurs définissant les gains de commande et $u \in \mathfrak{R}$, une loi de commande vérifiant :

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{Si } S(x) > 0 \\ u^- & \text{Si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Selon cette loi, le système présente un régime glissant caractérisé par la dynamique équivalente :

$$f_{eq}(x) = f(x) + g(x)u_{eq} \quad (6.11)$$

Dans laquelle u_{eq} est la commande équivalente qui rend la surface de glissement S invariante et vérifie, pour $x \in S$, l'inégalité :

$$\min(u^-(x), u^+(x)) < u_{eq} < \max(u^-(x), u^+(x)) \quad (6.12)$$

En notant :

$$u_{\min} = \min(u^-(x), u^+(x)) \quad \text{et} \quad u_{\max} = \max(u^-(x), u^+(x)) \quad (6.13)$$

On peut interpréter u_{eq} comme étant la valeur moyenne de $u(t)$ lors de la commutation rapide entre u_{\max} et u_{\min} .

La commande équivalente correspond au régime glissant idéal (ni seuil, ni retard, ni hystérésis), c'est à dire pour lequel le glissement est décrit en utilisant la condition d'invariance :

$$S(x) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{S}(x) = 0 \quad (6.14)$$

IL vient en développant les calculs :

$$\dot{S} = \langle \nabla S, f \rangle = 0 \quad (6.15)$$

d'où :

$$u_{eq} = -\frac{\langle \nabla S, f \rangle}{\langle \nabla S, g \rangle} \quad (6.16)$$

avec la condition d'existence :

$$\langle \nabla S, g \rangle \neq 0 \quad (6.17)$$

En portant l'expression de u_{eq} dans (6.16), on obtient l'équation du régime glissant idéal :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u_{eq} = [I - g(x)(\langle \nabla S, g(x) \rangle^{-1})\nabla S]f(x) \quad (6.18)$$

Remarque :

Le champ de vecteur g n'a aucune influence sur la dynamique glissante. En d'autres termes, seule la projection du champ f sur l'espace tangent à la surface détermine la dynamique glissante.

6.4.4.3. Domaine de glissement :

La détermination du domaine de glissement peut se ramener à l'étude de la stabilité du système en régime glissant. Pour cela, on suppose que le glissement s'effectue dans un voisinage tubulaire de la surface S (glissement réel) qu'on fera tendre, dans le cas d'un glissement idéal, vers la variété glissante S . Les résultats de Lyapunov concernant la stabilité des systèmes non linéaires peuvent être ainsi étendus aux régimes glissant.

Le domaine de glissement est le domaine dans lequel les conditions suffisantes de stabilité du système en régime glissant sont satisfaites. Le théorème suivant d'Utkin, qui est basé sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov, fournit ces conditions dans le cas général, celui des systèmes multivariables. Dans ce contexte, on définit la surface S comme étant l'intersection de plusieurs surfaces élémentaires.

6.4.4.3.1. Théorème :

Pour qu'un domaine D de la variété $S(x)=0$ soit un domaine de glissement pour le système (6.9), il suffit que pour tout x de ce domaine il existe une fonction $V(S, x, t)$, continûment différentiable par rapport à chacun de ses arguments, définie sur un ensemble Ω contenant l'origine et vérifiant les conditions ci-dessous :

1. $V(S, x, t)$ est définie positive par rapport à :

$$V(S, x, t) > 0 \text{ si } S \neq 0 \quad \text{et} \quad V(0, x, t) = 0$$
2. $\frac{dV(S, x, t)}{dt}$ est définie négative pour tout $S(x) \neq 0$ (en S elle n'est pas définie).

6.4.5. Invariance des régimes glissants vis à vis des perturbations :

Considérons le système perturbé suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x) \tag{6.19}$$

où p représente les perturbations paramétriques du champ de vecteurs nominal $f(x)$.

L'invariance du régime glissant vis-à-vis de la perturbation p est donnée par la définition suivante:

6.4.5.1. Définition :

Le régime glissant idéal possède une propriété d'invariance forte par rapport à la perturbation p si la dynamique du système en mode de glissement idéal est indépendante du signal de perturbation p .

6.4.5.2. Théorème :

Le régime glissant sur la variété S du système perturbé (6.19), satisfait les propriétés d'invariance vis-à-vis de p , si et seulement le vecteur perturbation p satisfait la condition suivante :

$$p \in Vect \{g(x)\} \quad (6.20)$$

avec $Vect$ l'espace engendré par la base $g(x)$.

6.4.6. Bouclage linéarisant à structure variable :

Le problème de la linéarisation par difféomorphisme et bouclage consiste à transformer, de manière exacte dans un domaine ouvert donné, un système non linéaire en un système linéaire à l'aide d'un bouclage d'état et d'un changement de variables sur l'état du système. Lorsqu'elle existe, cette transformation permet de stabiliser le système en utilisant les méthodes courantes du linéaire (placement de pôles, synthèse quadratique, synthèse robuste, etc.). L'emploi de cette technique pour la régulation est essentiellement justifié par la facilité d'analyse du comportement des systèmes linéaires et de la résolution d'un nombre important de problèmes réels dans ce contexte.

Dans le cas de la synthèse robuste, il existe des travaux concernant les bouclages linéarisants à structure variable. On peut citer par exemple, les travaux de Fernandez et de Sira-Ramirez. Par la suite, des chercheurs comme Harashima commencèrent à s'intéresser à l'aspect pratique de cette approche.

Dans ce contexte, l'utilisation de la commande à structure variable a pour objectif de créer un régime glissant afin de stabiliser le système représenté sous la forme canonique de commandabilité.

6.4.6.1. Linéarisation exacte par retour d'état statique :

Soit le système non linéaire de dimension n sous la forme canonique de commandabilité, décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = f(x, t) + g(x, t)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.21)$$

Si l'on considère le retour d'état statique :

$$u = \frac{1}{g(x, t)}(v^* - f(x, t)) \quad (6.22)$$

Expression dans laquelle v^* définit une nouvelle entrée, il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = v^* \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.23)$$

Le modèle linéaire ainsi obtenu correspond au schéma de la figure suivante :

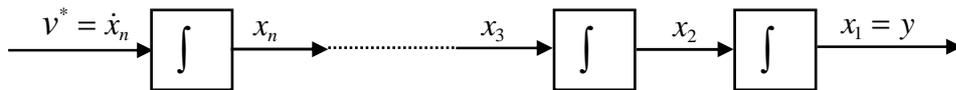


Figure 6.5. Principe de la linéarisation par retour d'état statique.

6.4.6.2. Bouclage à structure variable :

Dans le but de rendre l'origine de l'espace d'état asymptotiquement stable pour le système (6.21), la surface de glissement S doit contenir le point final de stabilisation. En d'autres termes elle doit vérifier $S(\text{l'origine}) = 0$. Cette surface est prise ici linéaire dans le plan des phases et choisie comme étant la sous-variété de l'évolution désirée du système lors de l'application de la commande discontinue. On prend S de la forme :

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_n = 1 \quad (6.24)$$

Les $a_i (i = 1, \dots, n)$ définis dans (6.24) sont choisis de telle manière que $a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$ soit un polynôme d'Hurwitz.

Nous présentons l'approche la plus classique, où la surface de glissement S est une solution de l'équation :

$$\dot{S} = -M \text{sign}(S) \quad (6.25)$$

tel que :

$$\text{sign}(S) = \begin{cases} +1 & \text{Si } S(x) > 0 \\ 0 & \text{Si } S(x) = 0 \\ -1 & \text{Si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

et M est une constante strictement positive appelée gain de glissement.

Ce choix de la surface S permet de satisfaire la condition d'attractivité :

$$S\dot{S} < 0 \quad \text{Si } S \neq 0 \quad (6.27)$$

En effet :

$$S\dot{S} = -M|S| < 0, \quad \text{Si } S \neq 0 \quad (6.28)$$

Considérons (6.24), la dérivée de S s'écrit :

$$\dot{S} = \dot{x}_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} \quad (6.29)$$

L'équation (6.25) permet d'établir la relation :

$$\dot{x}_n = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - M \text{sign}(S) \quad (6.30)$$

Si l'on considère le système (6.23), il en résulte pour la nouvelle entrée l'expression :

$$v^* = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - M \text{sign}(S) \quad (6.31)$$

Ce qui permet, compte tenu de l'équation (6.21), de définir le bouclage linéarisant à structure variable :

$$u = \frac{1}{g(x,t)} \left(-\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - M \text{sign}(S) - f(x,t) \right) \quad (6.32)$$

Cette commande apparaît comme la somme d'un signal de basse fréquence u_{eq} et d'un signal de haute fréquence Δu assurant le régime glissant. En effet, on a :

$$\begin{cases} u_{eq} = \frac{1}{g(x,t)} \left(-\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - f(x,t) \right) \\ \Delta u = \frac{-M \text{sign}(S)}{g(x,t)} \end{cases} \quad (6.33)$$

Quand le régime glissant est atteint, la dynamique du système originale (6.21) est plongée dans l'état d'un système réduit et libre représenté dans l'espace d'état par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.34)$$

Il est important de bien choisir les coefficients $a_i (i = 1, \dots, n)$ de la surface de glissement S puisqu'ils déterminent la dynamique et le mode de stabilisation.

Remarques :

1. La surface de glissement peut être définie d'une façon plus générale dans l'espace de l'erreur de la sortie y par rapport à la consigne y_c :

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (y^{(i)} - y_c^{(i)}), \quad a_n = 1 \quad (6.35)$$

En effet, en remplaçant y_c par zéro et $y^{(i)}$ par x_{i+1} dans (6.24), on retrouve l'équation (6.25).

2. Soit $S(t)$ la fonction continue, dérivable sur \mathfrak{R}_+ définie comme suit :

$$S(t) = \sum_{i=0}^n a_i (y^{(i)} - y_c^{(i)}), \quad a_n = 1 \quad (6.36)$$

Après le calcul de $\dot{S}(t)$ et la commande équivalente u_{eq} , en remplaçant l'expression de cette dernière dans l'équation (6.21), on obtient un système linéaire de dimension n défini dans l'espace des phases par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = \sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.37)$$

Le système (6.37) est de dimension n , par suite, l'introduction d'une telle fonction de glissement permet de ne pas réduire l'ordre du système en boucle fermée.

6.4.7. Robustesse par rapport aux perturbations :

Considérons le système dynamique défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = f(x,t) + g(x,t)u + p(x,t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.38)$$

où $p(x,t)$ représente les perturbations extérieures, les variations paramétriques et l'effet de certaines non linéarités. On se place dans le cas où l'hypothèse :

$$|p(x,t)| \leq p^1 \quad (6.39)$$

est satisfaite.

L'expression de S est donnée par l'équation (6.40), soit :

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_n = 1 \quad (6.40)$$

On désire assurer la condition d'attractivité (6.27) de la surface $S(x)=0$. En utilisant (6.28), le calcul de $S\dot{S}$ donne :

$$S\dot{S} = S \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} + f(x,t) + g(x,t)u + p(x,t) \right) \quad (6.41)$$

alors le bouclage linéarisant à structure variable (6.32) défini par :

$$u = \frac{1}{g(x,t)} \left(- \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - p(x,t) - f(x,t) \right) \quad (6.42)$$

assure l'attractivité de la surface $S(x)=0$ et maintient l'évolution sur celle-ci une fois atteinte si le gain de glissement M est supérieur à la borne maximum de la perturbation $p(x,t)$.

Soit, en considérant (6.43) :

$$M > p^1 \quad (6.43)$$

où p^1 est une borne connue.

6.4.8. Extensions méthodologiques :

Malgré les différents avantages de la commande par mode glissant, son utilisation dans certains domaines, a été entravée par les oscillations du régime glissant dues aux imperfections (hystérésis, retard) des éléments de commutations, qui excitent les dynamiques de hautes fréquences non modélisées.

Durant la phase d'approche, le système est sensible aux incertitudes et aux perturbations, ce qui affaiblit la robustesse du système.

Afin d'y remédier, de nombreux algorithmes à structures variables ont été développés durant la dernière décennie. On peut citer la commande par mode glissant continue dans une bande de la surface et la commande par mode glissant sans phase d'approche.

6.4.8.1. Commande continue selon Slotine :

La solution proposée par Slotine consiste à remplacer la loi de commande discontinue par une loi continue en x à l'extérieur d'une fine bande située au voisinage de la surface de glissement, la discontinuité étant conservée à l'extérieur de cette bande.

On choisit pour la composante haute fréquence :

$$\Delta u_i = -M_i \text{sat}\left(\frac{S_i}{\Phi_i}\right) \quad (6.44)$$

donc la commande continue dans une bande fine par mode glissant est défini à partir des conditions suivantes :

$$\text{Si } \left|\frac{S_i}{\Phi_i}\right| \leq 1 \quad \text{alors } \text{sat}\left(\frac{S_i}{\Phi_i}\right) = \left(\frac{S_i}{\Phi_i}\right) \quad \text{et } u_i = u_{ieq} - M_i \frac{S_i}{\Phi_i} \quad (6.45)$$

$$\text{Si } \left|\frac{S_i}{\Phi_i}\right| > 1 \quad \text{alors } \text{sat}\left(\frac{S_i}{\Phi_i}\right) = \text{sign}(S_i) \quad \text{et } u_i = u_{ieq} - M_i \text{sign}(S_i) \quad (6.46)$$

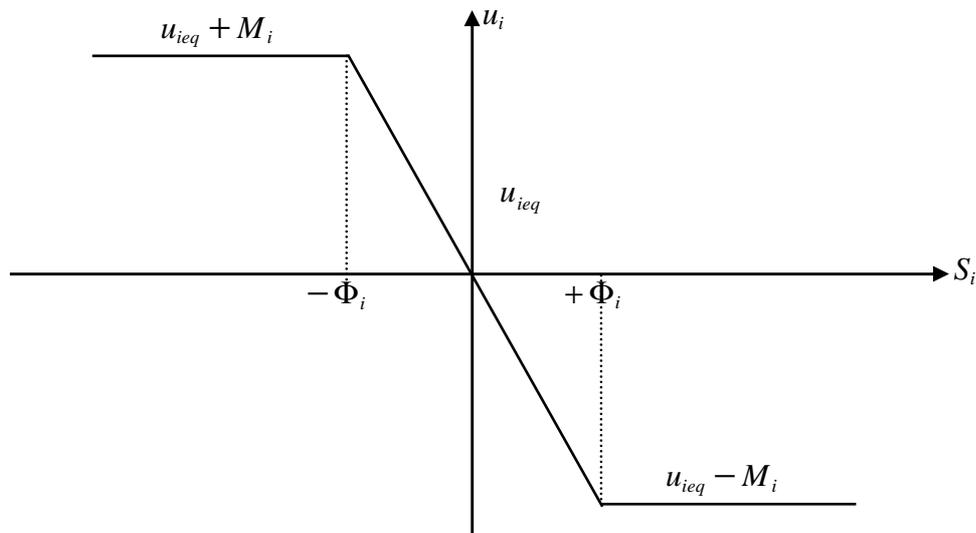


Figure 6.6. Loi de commande continue selon Slotine.

6.4.8.2. Commande par mode glissant sans phase d'approche :

Nous proposons de modifier la trajectoire de la surface de glissement de telle sorte que celle-ci passe par le point initial, ce qui permet la suppression de la phase d'approche, et par conséquent, renforcera la robustesse vu que la trajectoire du système sera sur la surface dès l'instant initial.

Pour cela, on considère une surface de glissement sous la forme suivante :

$$S = x_2 + \beta x_1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(t) \right) (x_2(0) + \beta x_1(0)) \quad (6.47)$$

tel que β est une constante positive, $x_1(0)$ et $x_2(0)$ représentent l'état initial.

La dérivée de (6.47) par rapport au temps peut être réécrite sous la forme (6.48) :

$$\dot{S} = \dot{x}_2 + \beta \dot{x}_1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+t^2} \right) (x_2(0) + \beta x_1(0)) \quad (6.48)$$

En utilisant (6.48) pour satisfaire la condition (6.49) :

$$S\dot{S} < 0 \quad (6.49)$$

La résolution de cette inéquation, par rapport à u , fournit des solutions assurant l'évolution du système en régime glissant. D'où :

$$u = -g^{-1}(x,t) \left(f(x,t) + \beta x_2 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+t^2} \right) (x_2(0) + \beta x_1(0)) + M \text{sign}(S) \right) \quad (6.50)$$

Pour étudier la stabilité globale du système bouclé, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} S^T S \quad (6.51)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V} = S^T \dot{S} \quad (6.52)$$

$$\dot{V} = S^T \left[\dot{x}_2 + \beta \dot{x}_1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+t^2} \right) (x_2(0) + \beta x_1(0)) \right] \quad (6.53)$$

$$\dot{V} = S^T \left[f(x,t) + g(x,t)u + \beta x_2 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+t^2} \right) (x_2(0) + \beta x_1(0)) \right] \quad (6.54)$$

$$\dot{V} = -M|S| \quad (6.55)$$

$$\text{donc : } \dot{V} \leq 0 \quad (6.56)$$

Ainsi la commande (6.50) est stabilisante.

6.4.8.3. Exemple :

Considérons le système non linéaire du deuxième ordre représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1x_2 + u + p(x,t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.57)$$

On souhaite pour la sortie y , une réponse à une entrée nulle du type deuxième ordre de constante de temps équivalente égale à 1/3 de seconde. Comme ce n'est pas possible ici, on choisit un comportement du type premier ordre avec la même constante de temps.

Il en résulte pour l'expression :

$$S = 3x_1 + x_2 \quad (6.58)$$

En utilisant l'équation (6.57), la condition de glissement devient :

$$S\dot{S} = S(3x_2 - x_1x_2 + u + p(x,t)) < 0 \quad (6.59)$$

La résolution de cette inéquation, par rapport à u , fournit des solutions assurant l'évolution du système en régime glissant. Le bouclage

$$u = -3x_1 + x_1x_2 - M\text{sign}(S) \quad (6.60)$$

assure l'attractivité de la surface S .

La simulation a été réalisée dans le cas où :

$$p(x,t) = \sin(t) \quad (6.61)$$

Par suite, pour satisfaire la condition d'attractivité de la surface et de robustesse de la commande impose un gain de glissement $M > 2$.

Les figures suivantes présentent les résultats de simulation qui a été faite en 10 secondes pour un gain de glissement $M=5$.

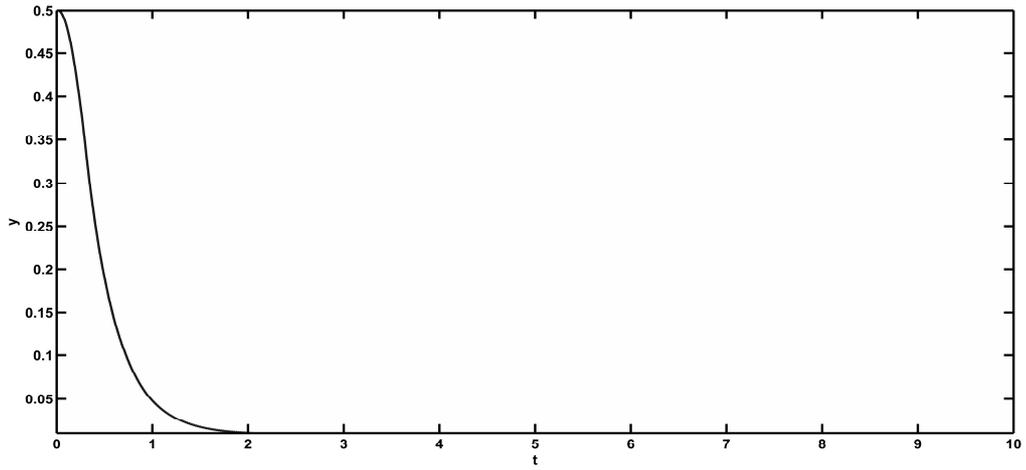


Figure 6.7. Évolution de la sortie désirée.

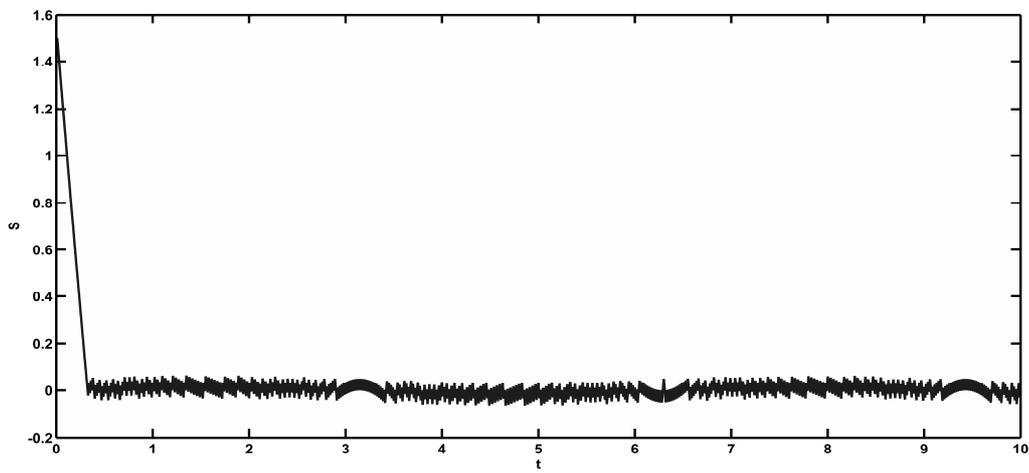


Figure 6.8. Variation de la surface de glissement.

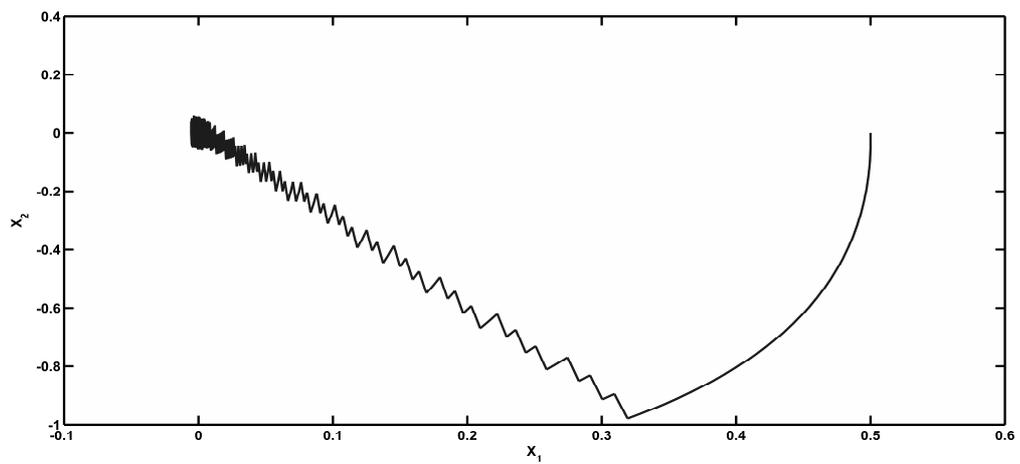


Figure 6.9. Plan de phase.

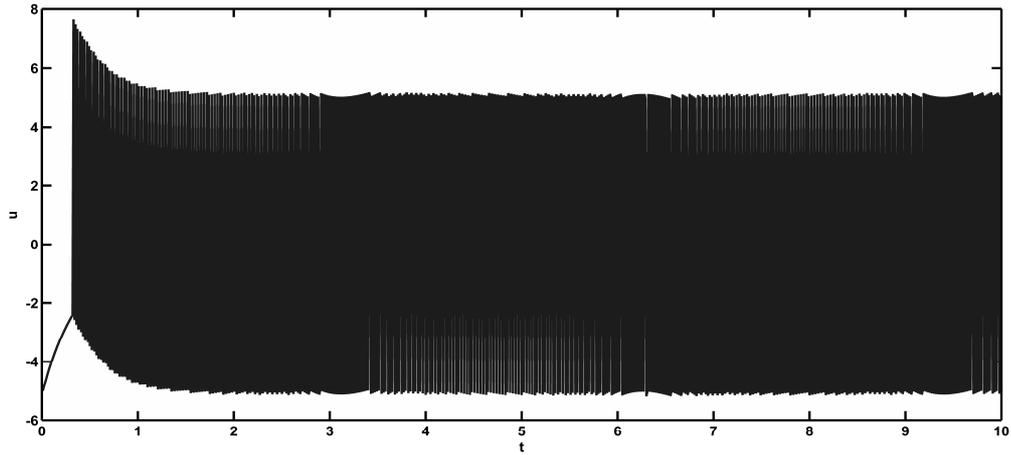


Figure 6.10. Variations de la commande discontinue.

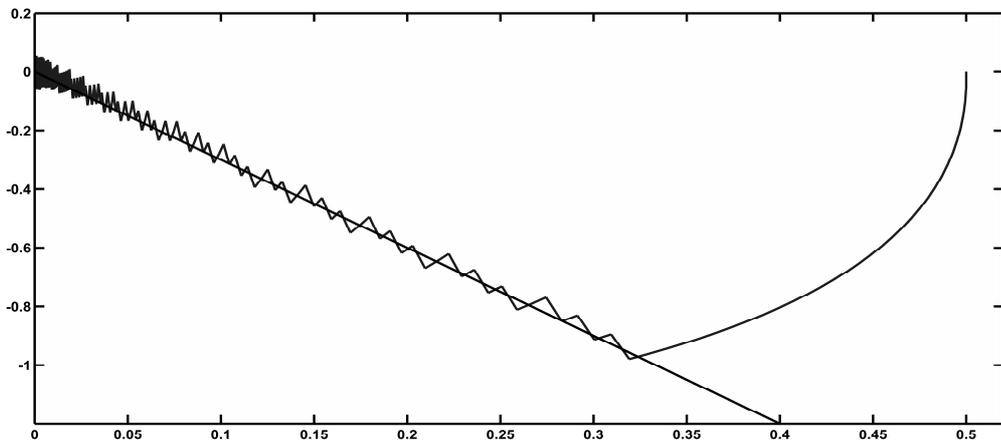


Figure 6.11. Glissement.

On constate que la sortie réelle y du processus coïncide avec la sortie désirée y_d (sortie du système non perturbé) après un certain temps.

Ce type de loi de commande permet donc d'atteindre l'objectif souhaité, mais engendre des oscillations donnant lieu sur certaines grandeurs à un phénomène de broutement indésirable en pratique.

Reprenons le système défini en (6.57) en remplaçant la fonction $sign(S)$ dans (6.60) par la fonction $sat\left(\frac{S}{\Phi}\right)$, il en résulte pour la loi de commande l'expression :

$$u = -3x_1x_2 + x_1x_2 - M \cdot sat\left(\frac{S}{\Phi}\right) \quad (6.62)$$

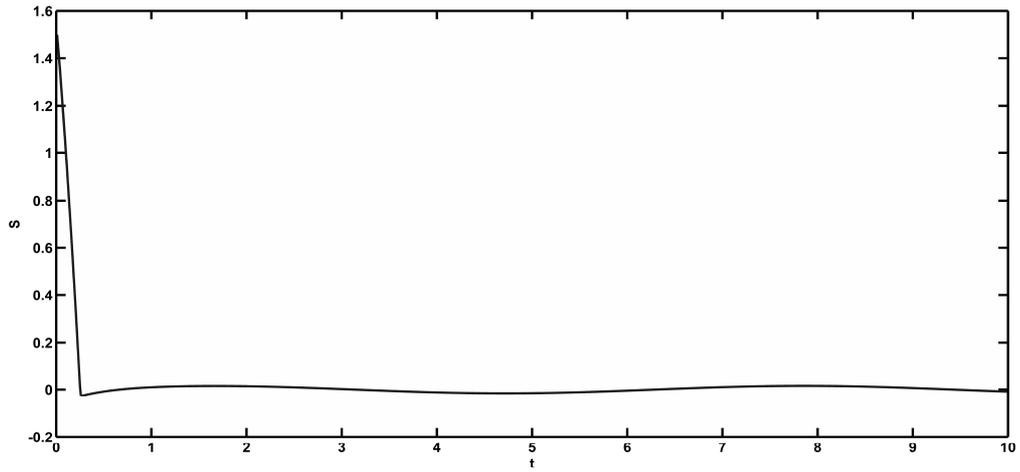


Figure 6.12. Variations de S.

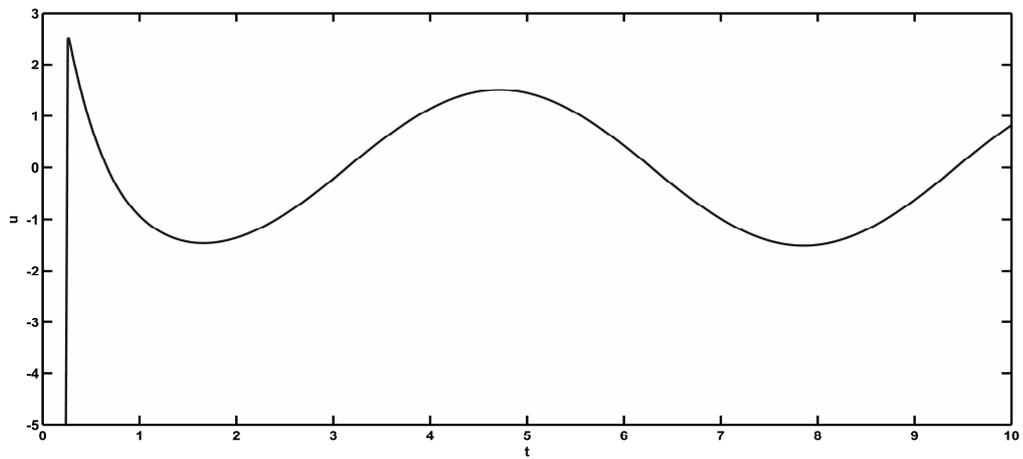


Figure 6.13. Variations de la commande continue.

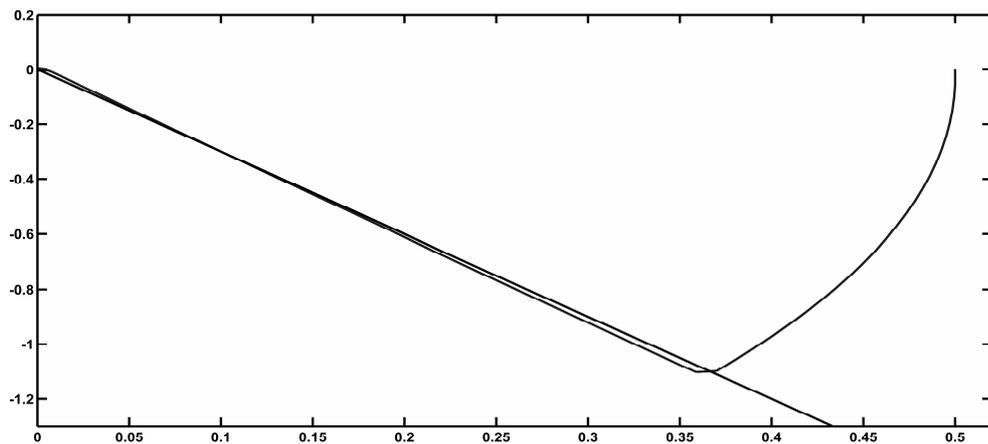


Figure 6.14. Glissement.

Dans la figure (6.15), on illustre l'influence du choix de gain de glissement sur le temps de ralliement de point d'équilibre.

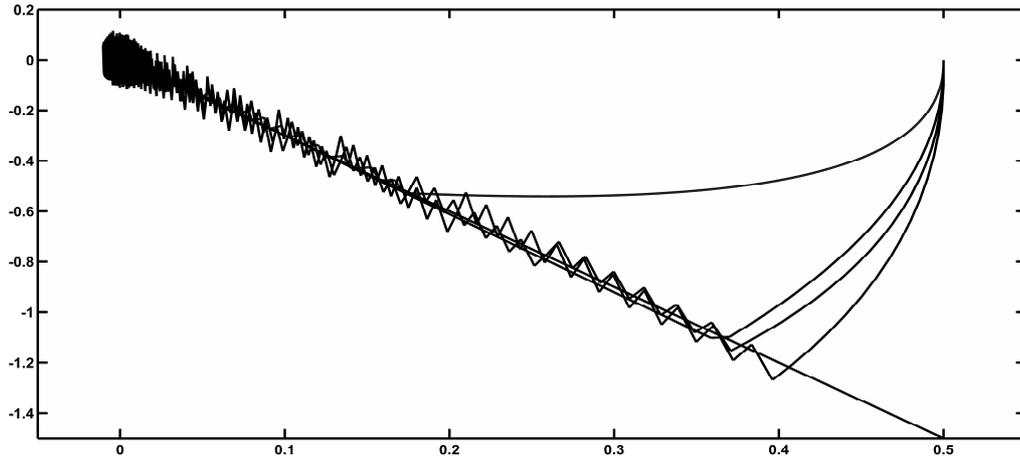


Figure 6.15. Plan de phase pour des gains de glissement différents.

Reprenons le système défini en (6.57) en utilisant la commande par mode glissant sans la phase d'approche, il en résulte pour la loi de commande l'expression :

$$u = x_1 x_2 - \beta x_2 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(t) \right) (x_2(0) + \beta x_1(0)) \quad (6.63)$$

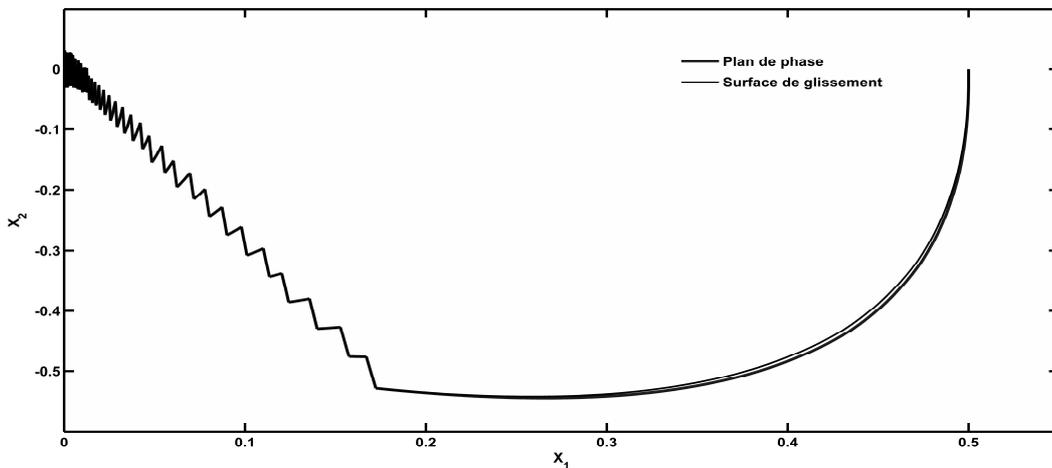


Figure 6.16. Plan de phase et surface de glissement dans le cas d'une commande sans phase d'approche.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons donné les notions générales sur les systèmes non linéaires, à cycles limites, à bifurcations et chaotiques. Les trois types des systèmes sont illustrés à l'aide des exemples traités par le logiciel Matlab. Nous avons présentés les différents types de non-linéarités, nous avons discuté les

points singuliers pour pouvoir tracer le plan de phase au voisinage des ces derniers et étudier la stabilité du système non linéaire. Nous avons défini la stabilité au sens de Lyapunov.

Nous avons cité les problèmes qui nous nécessitent l'intervention de la théorie des systèmes de commande non linéaire. L'intérêt majeur de la commande par mode glissant est la simplicité de mise en œuvre de cette loi de commande mais son utilisation a été entravée par les oscillations du régime glissant dues aux imperfections (hystérésis, retard) des éléments de commutations, qui excitent les dynamiques de hautes fréquences non modélisées et le système est sensible aux incertitudes et aux perturbations durant la phase d'approche ce qui affaiblit la robustesse du système. Afin de y remédier, deux approches de mode glissant sont présentées dans ce cours. On peut citer la commande par mode glissant continue selon Slotine et la commande par mode glissant sans phase d'approche. Nous avons confirmé les propositions des deux approches de commande par mode glissant par un exemple de simulation.

Bibliographie

C. COSTE, Introduction à la physique non linéaire.

D. Arzelier, D. Peaucelle, Systèmes et asservissements non linéaires.

D. Viennot, Non-linéarités, chaos & contrôle, Analyse Spectrale pour les systèmes dynamiques classiques et quantiques.

D. Larminat, Automatique appliquée, Edition Hermès/Lavoisier, 2009.

F. Launay, Commande robuste et systèmes non linéaires.

Mullhaupt, Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires, Edition presse polytechniques et universitaires romandes, 2009.

P. Manneville, Dynamique non-linéaire appliquée au chaos et à son contrôle, hall, 2006.

P. Manneville, Systèmes non-linéaire et chaos, hall, 2006.

Y. Granjon, Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, Cours et exercices corrigés, Dunod, 2001.